Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Dois Vizinhos

Estrada para Boa Esperança, km 04, Comunidade São Cristóvão – Dois Vizinhos – PR – 85660-000

MATEMÁTICA A
ÁLGEBRA LINEAR

Lilian de Souza Vismara
Mestre Eng. Elétrica – ESSC / USP
Licenciada em Matemática – UFSCar

OPERAÇÕES COM VETORES
Vetores, trigonometria & geometria analítica

Lilian de Souza Vismara
Mestre Eng. Elétrica – ESSC / USP
Licenciada em Matemática – UFSCar

Geometria analítica???

O estudo de pontos, retas e segmentos constitui o alicerce da geometria analítica porque, por meio dele, é possível transpor inúmeros problemas geométricos para uma linguagem algébrica.

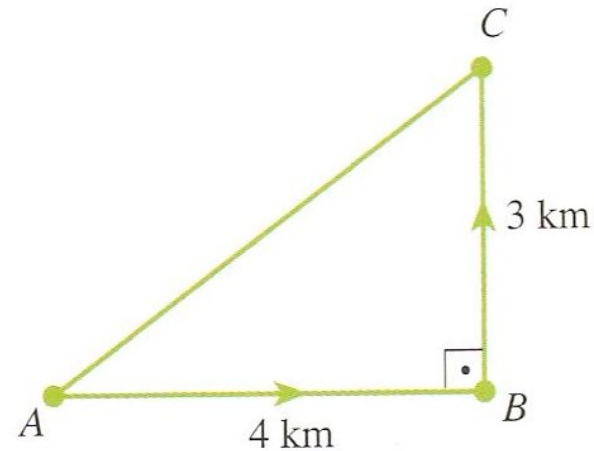
Caricatura de **René Descartes** (1596-1650): Filósofo, Matemático e Físico. Durante a Idade Moderna também era conhecido por seu nome latino **Renatus Cartesius**.

Imagem disponível em: <http://www.filosofix.com.br/blogramiro/?p=234>. Acesso em: 23 ago 2013.

Distância entre dois pontos

Física. Um táxi parte do ponto A e move-se 4 km para o leste atingindo o ponto B. Em seguida, move-se 3 km para o norte atingindo o ponto C.

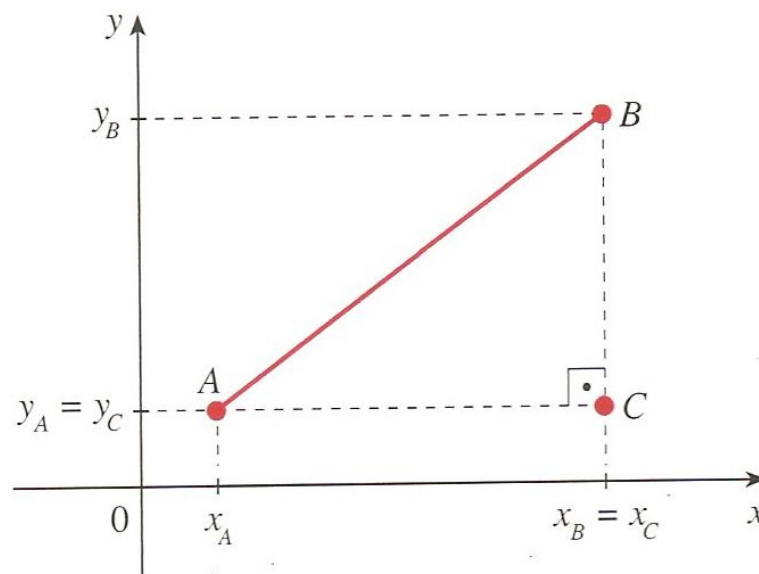
Qual é a distância entre os pontos A e C?

A distância entre os pontos A e C é a medida do segmento $\overline{AC}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow AC = \sqrt{25} \Rightarrow AC = 5$

Portanto, a distância entre os pontos A e C é 5 quilômetros.

Vamos determinar a distância d_{AB} entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano.

Observação

- A distância d_{AB} é a medida do segmento de extremidades A e B.
- A fórmula ao lado também funciona quando A e B estão alinhados horizontalmente ou verticalmente.

Repare que temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{AB})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

A distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercício 1:

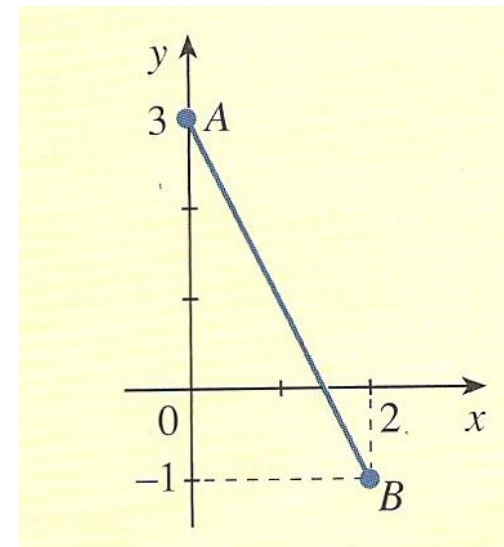
Calcular a distância entre os pontos $A(0, 3)$ e $B(2, -1)$.

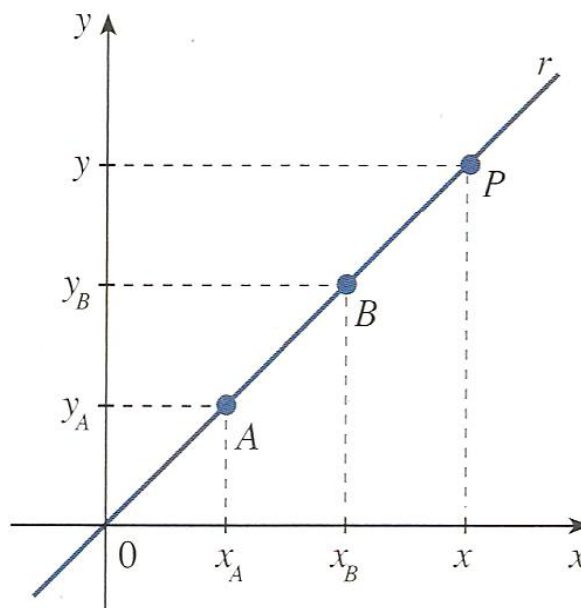
Solução

Como $A(0, 3)$ e $B(2, -1)$, então, $x_A = 0$, $y_A = 3$, $x_B = 2$ e $y_B = -1$.

Substituindo esses valores em $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow d_{AB} = 2\sqrt{5}$$

Representação geométrica:

Equação Geral da Reta

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_A - y_B)}_{a}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{x_A y_B - x_B y_A}_{c} = 0$$

Equação Geral da Reta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_A - y_B)}_{a}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{x_A y_B - x_B y_A}_{c} = 0$$

Assim, não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

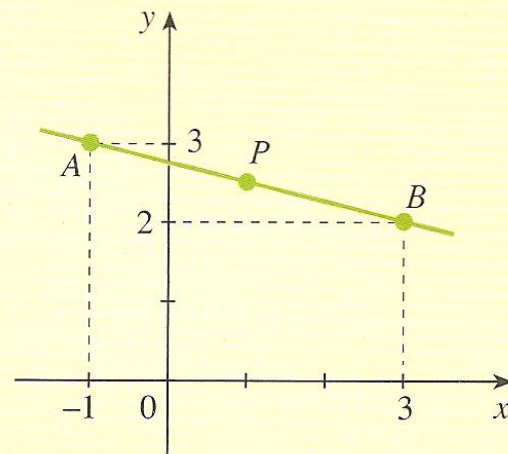
$$ax + by + c = 0$$

Observação

Note que nesse determinante as únicas variáveis são x e y. Os outros elementos da matriz são números reais conhecidos.

Exercício 2:

Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.

Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

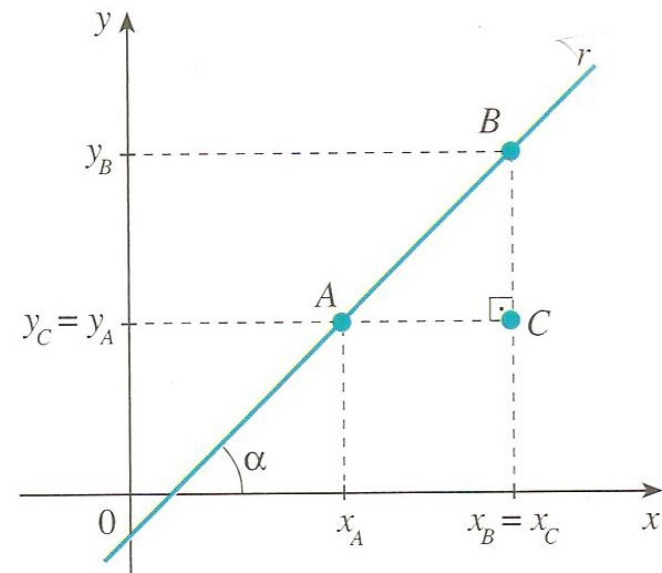
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$x + 4y - 11 = 0$

Determinação do coeficiente angular da reta

Considere dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e que forma com o eixo x um ângulo α.

Para $0° < \alpha < 90°$, temos:

O triângulo ABC é retângulo em C. Logo:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{d_{BC}}{d_{CA}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

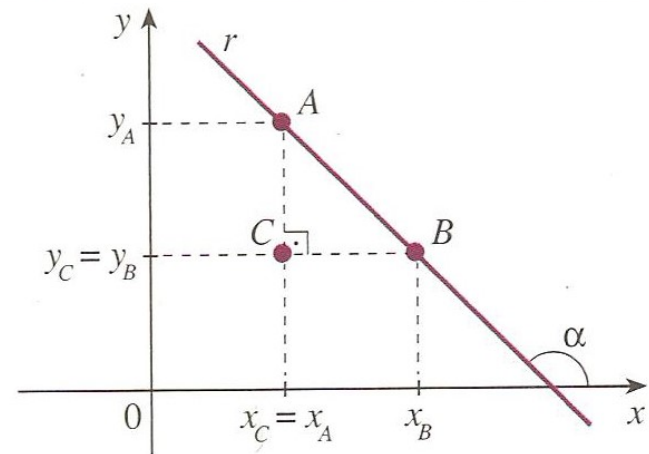
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Observação

Podemos usar $y_A - y_B$ no numerador desde que usemos $x_A - x_B$ no denominador, o que nos permite usar a notação: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Determinação do coeficiente angular da reta

Considere dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e que forma com o eixo x um ângulo α.

Para $90° < \alpha < 180°$, temos:

O triângulo ABC é retângulo em C. Logo:

$$m = \text{tg}\,\alpha = -\text{tg}(180° - \alpha) = -\frac{d_{AC}}{d_{BC}} =$$

$$= -\frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercício 3:

a) Determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(5, 7)$.

b) Dados os pontos $A(k, 2)$ e $B(2, 5)$ de uma reta, e seu coeficiente angular

Solução:

a) Determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(5, 7)$.

O coeficiente angular é: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-2}{5-3} = \dfrac{5}{2}$

b) Dados os pontos $A(k, 2)$ e $B(2, 5)$ de uma reta, e seu coeficiente angular

$m = 1$, determinar o valor de k.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 1 = \frac{5-2}{2-k} \Rightarrow 2 - k = 5 - 2 \Rightarrow k = -1$$

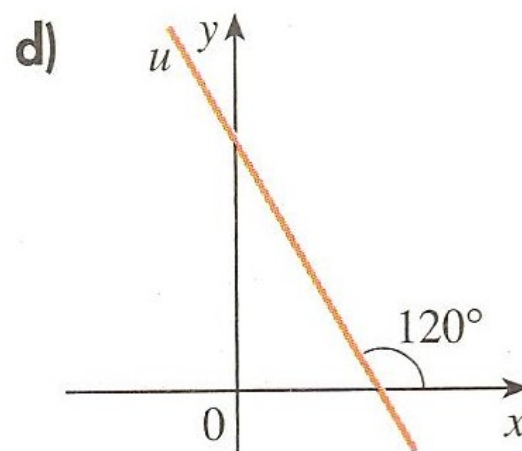
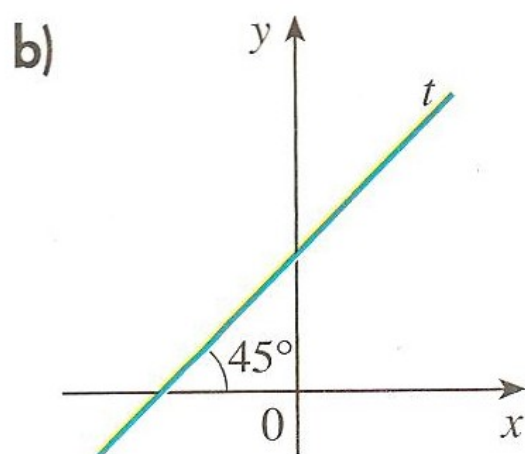
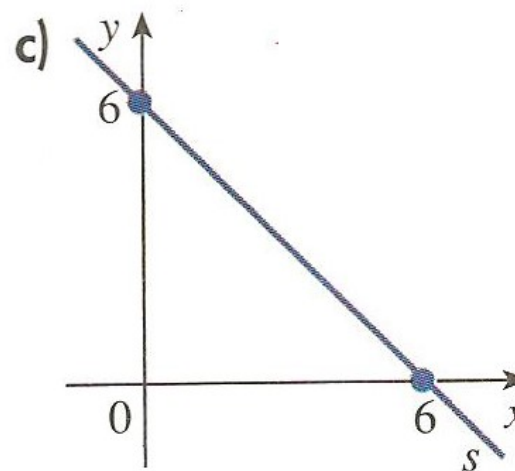
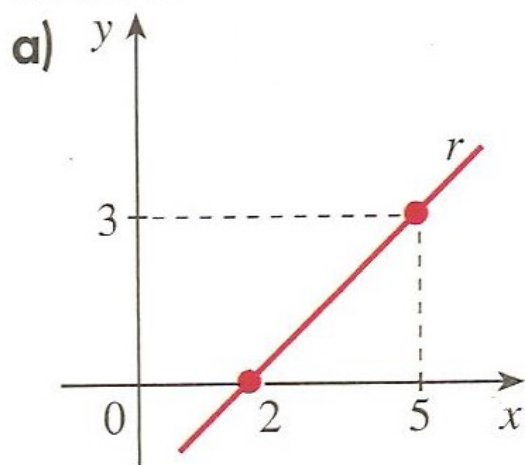
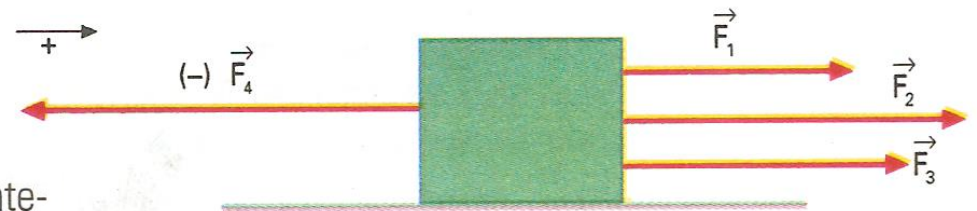
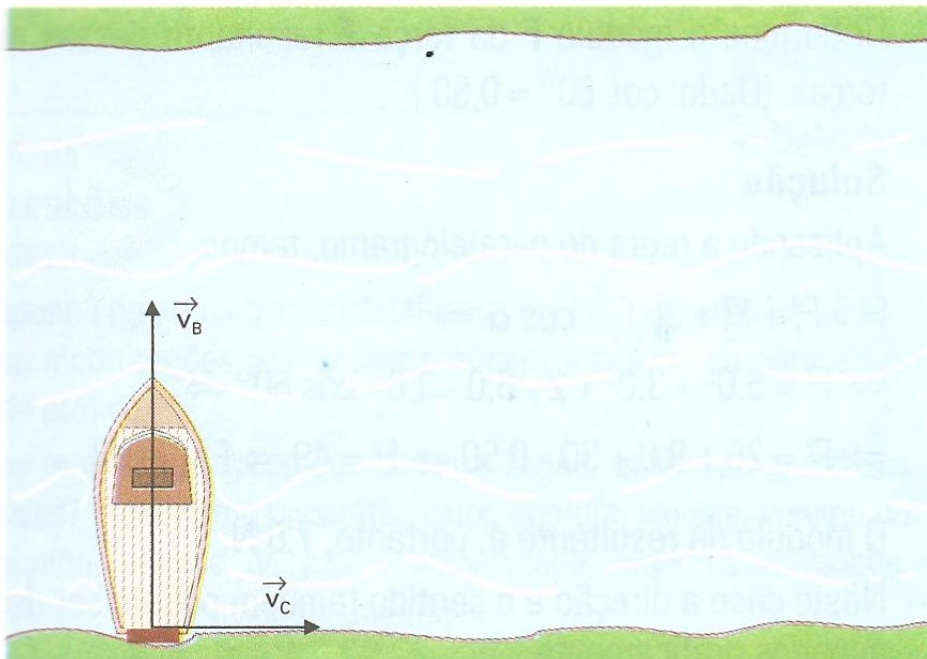
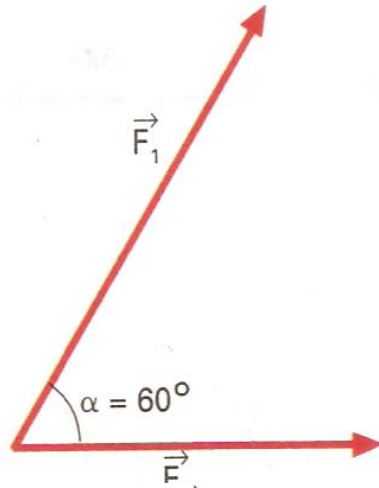
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

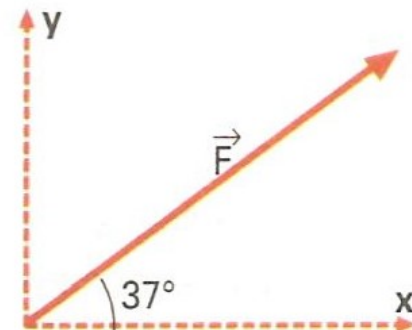
0. Calcule o coeficiente angular das retas representadas abaixo:

a)

c)

b)

d)

1. Sobre o bloco da figura abaixo atuam as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ de módulos $F_1 = 20$ N, $F_2 = 30$ N, $F_3 = 25$ N e $F_4 = 35$ N. Determine o módulo da força resultante que atua sobre o bloco.

2. Um barco atravessa um rio perpendicularmente à correnteza. Sabendo que os módulos das velocidades do barco e da correnteza do rio são, respectivamente, $v_B = 4{,}0$ m/s e $v_C = 3{,}0$ m/s, determine o módulo da velocidade resultante.

3. Na figura abaixo estão representadas duas forças: $\vec{F}_1$, de módulo $F_1 = 5{,}0$ N e $\vec{F}_2$, de módulo $F_2 = 3{,}0$ N, formando entre si um ângulo $\alpha = 60°$.

Determine o módulo **F** da força $\vec{F}$ resultante dessas duas forças. (Dado: cos 60° = 0,50.)

4. No esquema representado na figura ao lado, a força $\vec{F}$ tem módulo F = 200 N. Determine o módulo de seus componentes horizontal, $\vec{F}_x$, e vertical, $\vec{F}_y$. São dados: cos 37° = 0,80 e sen 37° = 0,60.

Referências

Referências utilizadas:
Matemática: construção e significado. 1. ed. Coordenação técnica José Luiz P. Mello, Editora responsável Juliane Matsubara Barroso. São Paulo: Moderna, 2005. Volume único.
GASPAR, A. **FÍSICA.** Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2008.
SILVA, R. T. **Notas de aula de Física**. 2002.

Referencias Básicas:
KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 6 ed., 1998.
HOWARD, A. **Álgebra Linear com Aplicações** Rio de Janeiro: Bookman, 8ed, 2001.
LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2 ed., 1999

Referências Complementares:
BOLDRINI, C. R. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 1984
IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Saraiva,1993.
STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 2ed.,1987.
http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/gaalt00.pdf
http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/livro/al2.pdf

OBRIGADA !